УДК 517.977

М. Д. Локшин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ ВОЗДЕЙСТВИЯ И ФУНКЦИОНАЛОМ ОТ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача конфликтного управления линейной системой при ограниченных ресурсах воздействия. Исследуемая задача относится к теории антагонистических позиционных дифференциальных игр. Исследования, проводимые в данной работе, осуществляются в рамках концепции задач игрового управления, развиваемой в последние годы в Екатеринбурге. Основы этой концепции изложены в монографиях [1–3]. В них были рассмотрены задачи с геометрическими ограничениями на управляющие воздействия. Затем в работах [4, 5] были продолжены исследования игровых задач в рамках указанной концепции для критериев качества более сложной структуры. В статьях [6, 7] были разработаны конструктивные методы построения оптимальных стратегий и вычисления цены игры для ряда задач конфликтного управления с ограниченными ресурсами воздействия. Специфика данной работы состоит в том, что рассматривается новый класс дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управляющие воздействия игроков: показатель качества представляет собой максимум из полунорм фазовых состояний системы в заданные моменты времени.

Пусть динамика объекта описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \ u \in \mathbb{R}^r, \ v \in \mathbb{R}^s, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t_0 \le t \le \vartheta, \tag{1.1}$$

где x – фазовый вектор; u – вектор управляющего воздействия, v – вектор помехи. Предполагается, что матрицы-функции $A(t), B(t), C(t)$ являются кусочно-непрерывными при $t_0 \le t \le \vartheta$, а t_0 и ϑ – фиксированные моменты времени. Любые возможные реализации управляющего воздействия $u[t_0[\cdot]\vartheta) = \{u[t], t_0 \le t < \vartheta\}$ и помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ суть измеримые по Борелю функции, удовлетворяющие ограничениям

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \langle u[t], \Phi(t)u[t]\rangle dt \le \mu[t_0], \ \int_{t_0}^{\vartheta} \langle v[t], \Psi(t)v[t]\rangle dt \le \eta[t_0],$$

где $\mu[t_0] > 0$, $\eta[t_0] > 0$ – заданные величины, которые определяют ресурсы управляющего воздействия и помехи в момент t_0. Здесь символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение; $\Phi(t), \Psi(t)$ – определенно-положительные матрицы-функции. В данной работе в соответствии с упомянутой ранее концепцией управляющее воздействие отождествляется с управлением первого игрока, а воздействие помехи – с управлением второго игрока. Под стратегиями первого и второго игроков будем понимать функции

$$u(t,x,\mu,\eta,\varepsilon),\ v(t,x,\mu,\eta,\varepsilon),\ t_0 \le t \le \vartheta,\ x \in \mathbb{R}^n,$$
$$0 \le \mu \le \mu[t_0],\ 0 \le \eta \le \eta[t_0],\ \varepsilon > 0.$$

Пусть выбрана стратегия $u(\cdot)$, реализовалась позиция $\{t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]\}$, где $t_* \in [t_0, \vartheta)$; $0 \le \mu[t_*] \le \mu[t_0]$; $0 \le \eta[t_*] \le \eta[t_0]$, и пусть выбраны значение $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta\{t_i\}$, $i = 1, \ldots, k+1$, отрезка $[t_*, \vartheta]$, где $t_1 = t_*, \ldots, t_{k+1} = \vartheta$. Пусть реализовалось управление второго игрока

$$v[t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t], t_* \le t < \vartheta, \int_{t_*}^{\vartheta} \langle v[t], \Psi(t)v[t]\rangle dt \le \eta[t_*]\}. \tag{1.2}$$

Тогда движение объекта

$$h[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t_*[\cdot]\vartheta], \mu[t_*[\cdot]\vartheta], \eta[t_*[\cdot]\vartheta]\} = \{\{x[t], \mu[t], \eta[t]\}, t_* \le t \le \vartheta\}$$

при $t_* \le t \le \vartheta$ определяется как решение дифференциальных уравнений

$$\frac{dx[t]}{dt} = A(t)x[t] + B(t)u_i + C(t)v[t],\ \frac{d\mu[t]}{dt} = -\langle u_i, \Phi(t)u_i\rangle,$$
$$u_i = u(t_i, x[t_i], \mu[t_i], \eta[t_i], \varepsilon),\ \frac{d\eta[t]}{dt} = -\langle v[t], \Psi(t)v[t]\rangle,\ t_i \le t < t_{i+1},$$

если $\mu[t] > 0$, и

$$\frac{dx[t]}{dt} = A(t)x[t] + C(t)v[t], \frac{d\eta[t]}{dt} = -\langle v[t], \Psi(t)v[t]\rangle,\ t^* \le t < \vartheta,$$

если существует момент $t^* < \vartheta$, в который будет верно равенство $\mu[t^*] = 0$, т. е. ресурс первого игрока истрачивается полностью и в дальнейшем этот игрок уже не будет оказывать управляющее воздействие на объект.

Если выбрана стратегия второго игрока $v(\cdot)$ и реализовалось управление

$$u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t], t_* \le t < \vartheta, \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u[t], \Phi(t)u[t]\rangle dt \le \mu[t_*]\}, \tag{1.3}$$

первого игрока, то движение $h[t_*[\cdot]\vartheta]$ определяется при $t_* \le t \le \vartheta$ аналогично. Значения $\mu[t], \eta[t]$ определяются в ходе управления из анализа движения.

При этом предполагаем, что допустимы сколь угодно большие мгновенные значения управляющих воздействий $u[t]$ и $v[t]$.

Пусть на отрезке $[t_0, \vartheta]$ даны моменты времени $t^{[i]}$ $(i = 1, \ldots, N;\ t^{[N]} = \vartheta)$, а также определены множество натуральных чисел $q^{[i]} = q[t^{[i]}] \in \{1, \ldots, n\}$ и постоянные матрицы $D^{[i]}$ размерности $q^{[i]} \times n$. Далее, пусть заданы некоторые нормы $\mu^{[i]}(y)$ для $q^{[i]}$-мерных векторов y. Критерий качества управления выбираем в виде функционала

$$\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \max_i \{\mu^{[i]}(D^{[i]}x[t^{[i]}])\},\ i \in \{g, \ldots, N\}, \tag{1.4}$$

где $g = \min\{\ i\ :\ t^{[i]} \geq t_*\}$; t_* – момент времени, начиная с которого рассматривается процесс управления.

Пусть символ Δ_δ, где $\delta > 0$, обозначает разбиение $\Delta\{\tau_j\}$ отрезка $[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющее условию $\max_j(\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \delta$. Для стратегий $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальной позиции $\{t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]\}$ назовем гарантированными результатами величины

$$c(u(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \lim_{\delta \to 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]),$$

$$c(v(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]) = \underline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \lim_{\delta \to 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta)} \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]),$$

где реализации $v[t_*[\cdot]\vartheta), u[t_*[\cdot]\vartheta)$ удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Стратегии $u^o(\cdot), v^o(\cdot)$ назовем оптимальными универсальными стратегиями, если выполнены условия

$$c(u^o(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]) = \min_{u(\cdot)} c(u(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]),$$

$$c(v^o(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]) = \max_{v(\cdot)} c(v(\cdot), t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*])$$

для всякой допустимой начальной позиции $\{t_*, x_*, \mu[t_*], \eta[t_*]\}$.

Теорема 1.1. *Дифференциальная игра для объекта* (1.1) *с показателем качества* (1.4) *имеет цену* $c^o(t, x, \mu, \eta)$ *и седловую точку* $\{u^o(\cdot), v^o(\cdot)\}$*, образуемую парой оптимальных универсальных стратегий* $u^o(\cdot) = u^o(t, x, \mu, \eta, \varepsilon)$ *и* $v^o(\cdot) = v^o(t, x, \mu, \eta, \varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1.1 осуществляется по схеме из работ [2, 3, 6]. Оптимальные стратегии $u^o(\cdot)$ и $v^o(\cdot)$ обоих игроков строятся конструктивно в соответствии с методом экстремального сдвига на сопутствующие точки в случае, когда известна функция цены игры $c^o(t, x, \mu, \eta)$. Заметим, что в конструкции экстремального сдвига положительный параметр ε играет существенную роль (детальное описание этого обстоятельства см. в [2, 3]). Основной результат данной работы – эффективная процедура для вычисления функции цены игры $c^o(t,x,\mu,\eta)$ для рассматриваемого класса игровых задач управления с показателем качества (1.4).

2. Вычисление функции цены игры

Процедура вычисления цены игры $c^o(t,x,\mu,\eta)$ состоит в следующем. Пусть реализовалась позиция $\{t_*,x_*,\mu_*,\eta_*\}$ и выбрано разбиение $\Delta\{\tau_j\}$, $j=1,\dots,k+1,\ \tau_1=t_*,\ \tau_{k+1}=\vartheta$, отрезка $[t_*,\vartheta]$, а также пусть все моменты $t^{[i]}$ входят в число точек разбиения, т. е. выполнено условие $t^{[i]}\in\Delta\{\tau_j\},\ i\in\in\{g,\dots,N\}$. Введем множества

$$G^{[N]}=\{m=D^{[N]T}l,\ \mu^{[N]*}(l)\le 1,\ l\in\mathbb{R}^n\}$$

и функции

$$\Delta\psi_k(m,\mu,\eta)=I(\tau_k,\tau_{k+1},m,\mu,\eta)=\min_{u(\cdot)}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\langle m,X(\vartheta,\tau)B(\tau)u(\tau)\rangle d\tau+$$
$$+\max_{v(\cdot)}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\langle m,X(\vartheta,\tau)C(\tau)v(\tau)\rangle d\tau,\ \psi_k(m,\mu,\eta)=\Delta\psi_k(m,\mu,\eta),$$

где функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\langle u(\tau),\Phi(\tau)u(\tau))\rangle d\tau\le\mu,\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\langle v(\tau),\Psi(\tau)v(\tau))\rangle d\tau\le\eta,$$
$$0\le\mu\le\mu_*,\ 0\le\eta\le\eta_*,\ m\in G^{[N]},$$

а $X(t,\tau)$ – фундаментальная матрица для уравнения $\frac{dx[t]}{dt}=A(t)x[t]$. Здесь символ $\mu^{[N]*}(l)$ означает норму, сопряженную с нормой $\mu^{[N]}(l)$. Далее вводим функции

$$\varphi_{k+1}(m,\mu,\eta)\equiv 0,\ \varphi_k(m,\mu,\eta)=\{\psi_k(\cdot,\mu,\eta)\}_*,\ m\in G^{[N]},$$

где символом $\{\psi(\cdot)\}_*$ обозначена минимальная выпуклая вверх оболочка функции $\psi(m)$. Здесь и далее указанные выпуклые оболочки берутся только для m в соответствующих областях при фиксированных значениях других переменных.

Пусть область G_{j+1} и функция $\varphi_{j+1}(m,\mu,\eta)$ уже построены. Здесь $\tau_{j+1}<<t^{[i+1]}$ и $i+1>g$. Если $\tau_{j+1}>t^{[i]}$, то $G_j=G_{j+1}=G^{[i+1]}$ и

$$\Delta\psi_j(m,\mu,\eta)=I(\tau_j,\tau_{j+1},m,\mu,\eta),\ \psi_j(m,\mu,\eta)=\Delta\psi_j(m,\mu,\eta)+\varphi_{j+1}(m,\mu,\eta),$$
$$\varphi_j(m,\mu,\eta)=\{\psi_j(\cdot,\mu,\eta)\}_*,\ 0\le\mu\le\mu_*,\ 0\le\eta\le\eta_*,\ m\in G_j.$$

При этом нетрудно видеть, что

$$I(\tau_j, \tau_{j+1}, m, \mu, \eta) = -\Big(\mu \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \langle m, X(\vartheta,\tau)B(\tau)\Phi^{-1}(\tau)B^T(\tau)X^T(\vartheta,\tau)m\rangle d\tau\Big)^{1/2} +$$
$$+\Big(\eta \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \langle m, X(\vartheta,\tau)C(\tau)\Psi^{-1}(\tau)C^T(\tau)X^T(\vartheta,\tau)m\rangle d\tau\Big)^{1/2}, \ j = 1,\ldots,k.$$

Если $\tau_{j+1} = t^{[i]}$, то область $G_j = G^{[i]}$ состоит из векторов

$$m = (1-\alpha)m_1 \ + \ \alpha\, m_2, \ 0 \le \alpha \le 1,$$
$$m_2 \in G_{j+1}, \ m_1 = X^T(t^{[i]}, \vartheta)D^{[i]T} l, \ \mu^{[i]*}(l) \le 1, \tag{2.1}$$

и

$$\psi_j(m,\mu,\eta) = \max_{m_2,\alpha} \max_{0\le\eta'\le\eta} \min_{0\le\mu'\le\mu} [\Delta\psi_j(m,\mu',\eta') \ + \ \alpha\varphi_{j+1}(m_2, \mu-\mu', \eta-\eta')],$$
$$\varphi_j(m,\mu,\eta) = \{\psi_j(\cdot,\mu,\eta)\}_*, \ 0\le\mu\le\mu_*, \ 0\le\eta\le\eta_*, \ m\in G_j$$

при условии (2.1) на m, m_2, α.

Индукция по j продолжается вплоть до $j = 1$, т.е. когда выполнится равенство $\tau_1 = t_*$. Далее возможны следующие случаи: 1) $t_* < t^{[g]}$, 2)$t_* = t^{[g]}$. В случае 1 получаем функцию $\varphi_1(m,\mu,\eta)$, $m \in G_1 = G^{[g]}$. В случае 2 имеем $\varphi_1(m,\mu,\eta)$, $m \in G_1 = G^{[g+1]}$. Определим величину e равенством

$$e(t_*, x_*, \mu_*, \eta_*, \Delta\{\tau_j\}) = \max_m [\langle m, X(\vartheta, t_*)x_*\rangle + \varphi_1(m,\mu_*,\eta_*)], \ m \in G^{[g]},$$

если $t_* < t^{[g]}$, и

$$e(t_*, x_*, \mu_*, \eta_*, \Delta\{\tau_j\}) =$$
$$= \max_{m_1,\, m_2,\, \alpha} [\langle (1-\alpha)m_1 + \alpha\, m_2, X(\vartheta, t_*)x_*\rangle + \alpha\ \varphi_1(m_2, \mu_*, \eta_*)],$$
$$0 \le \alpha \le 1, \ m_2 \in G^{[g+1]}, \ m_1 = X^T(t_*, \vartheta)D^{[g]T} l, \ \mu^{[g]*}(l) \le 1,$$

если $t_* = t^{[g]}$. При этом полагаем по определению, что

$$e(\vartheta, x_*, \mu_*, \eta_*, \Delta\{\tau_j\}) = \mu^{[N]}(D^{[N]}x_*) = \max_l \{\langle l, D^{[N]}x_*\rangle\},$$

при $\mu^{[N]*}(l) \le 1$, $l \in \mathbb{R}^n$.

Проведя рассуждения по схеме из работ [2, 3], можно установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.1. *Пусть заданы позиция* $\{\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*]\}$*, разбиение* $\Delta\{\tau_j\}$ *отрезка* $[\tau_*, \vartheta]$*, число* $\varepsilon > 0$*, а также какая-либо реализация*

$$v[\tau_*[\cdot]\tau^*) = \{v[\tau], \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle v[\tau], \Psi(\tau) v[\tau]\rangle d\tau \leq \eta[\tau_*]\}, \tag{2.2}$$

где $\tau^* = \tau_2$ *– вторая точка разбиения* $\Delta\{\tau_j\}$*. Тогда найдется реализация*

$$u[\tau_*[\cdot]\tau^*) = \{u[\tau], \int_{\tau_*}^{\tau^*} \langle u[\tau], \Phi(\tau) u[\tau]\rangle d\tau \leq \mu[\tau_*]\}, \tag{2.3}$$

такая, что для соответствующего движения $h[\tau_*[\cdot]\tau^*]$*, порожденного из позиции* $\{\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*]\}$ *этими управлениями, будут выполнены соотношения*

$$e(\tau^*, x[\tau^*], \mu[\tau^*], \eta[\tau^*], \Delta^*\{\tau_j^*\}) - e(\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) \leq \varepsilon,$$

если $\tau_* = \tau_1 \neq t^{[g]}$*;*

$$\max \{ \mu^{[g]}(D^{[g]}x[t^{[g]}]),\ e(\tau^*, x[\tau^*], \mu[\tau^*], \eta[\tau^*], \Delta^*\{\tau_j^*\}) \} - \\ - e(\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) \leq \varepsilon,$$

если $\tau_* = t^{[g]}$*.*

Теорема 2.2. *Пусть заданы позиция* $\{\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*]\}$*, разбиение* $\Delta\{\tau_j\}$ *отрезка* $[\tau_*, \vartheta]$*, а также какая-либо реализация* $u[\tau_*[\cdot]\tau^*)$ *при условии* (2.3)*. Тогда найдется такая реализация* $v[\tau_*[\cdot]\tau^*)$*, удовлетворяющая* (2.2)*, что для движения, порожденного из позиции* $\{\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*]\}$ *этими управлениями, будут выполнены соотношения*

$$e(\tau^*, x[\tau^*], \mu[\tau^*], \eta[\tau^*], \Delta^*\{\tau_j^*\}) \ - \ e(\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) \geq 0,$$

если $\tau_* = \tau_1 \neq t^{[g]}$*;*

$$\max \{ \mu^{[g]}(D^{[g]}x[t^{[g]}]),\ e(\tau^*, x[\tau^*], \mu[\tau^*], \eta[\tau^*], \Delta^*\{\tau_j^*\}) \} - \\ - e(\tau_*, x[\tau_*], \mu[\tau_*], \eta[\tau_*], \Delta\{\tau_j\}) \geq 0,$$

если $\tau_* = t^{[g]}$*.*

Теоремы 2.1 и 2.2 означают, что для величины $e(t_*, x[t_*], \mu[t_*], \eta[t_*], \Delta\{\tau_j\})$ справедливы соответственно свойства u- и v-стабильности, которые были сформулированы в работах [2–7] для других классов дифференциальных игр. Эти свойства позволяют получить следующий результат.

Теорема 2.3. *Для произвольных начальной позиции* $\{t_*, x_*, \mu_*, \eta_*\}$ *и последовательности разбиений* Δ_k $(k = 1, 2, \dots)$ *отрезка* $[t_*, \vartheta]$ *с максимальным шагом* $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j)$, *удовлетворяющим условию* $\lim\limits_{k\to+\infty} \delta_k = 0$, *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to+\infty} e(t_*, x_*, \mu_*, \eta_*, \Delta_k) = c^o(t_*, x_*, \mu_*, \eta_*).$$

Теорема 2.3 означает, что величина $e(t_*,\ x_*,\ \mu_*,\ \eta_*,\ \Delta\{\tau_j\})$ при достаточно мелких разбиениях $\Delta\{\tau_j\})$ отрезка $[t_*, \vartheta]$ аппроксимирует цену игры $c^o(t_*, x_*, \mu_*, \eta_*)$. Заметим, что описанный метод вычисления функции цены игры может применяться также для ряда дифференциальных игр с интегральными ограничениями на одного из игроков.

Литература

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under Lack of Information. Boston: Birkhäuser, 1995.
4. Лукоянов Н. Ю., Решетова Т. Н. Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
5. Коврижных А. Ю. О построении цены дифференциальной игры с позиционным функционалом качества // Дифференциал. уравнения. 2001. Т. 37, №5. С. 638–647.
6. Локшин М. Д. О дифференциальных играх с интегральными ограничениями на управляющие воздействия // Там же. 1992. Т. 28, №11. С. 1952–1961.
7. Локшин М. Д. О конфликтном управлении динамической системой при интегральных ограничениях на управляющие воздействия // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. №4. С. 123–130.

Статья поступила 23.06.2002 г.